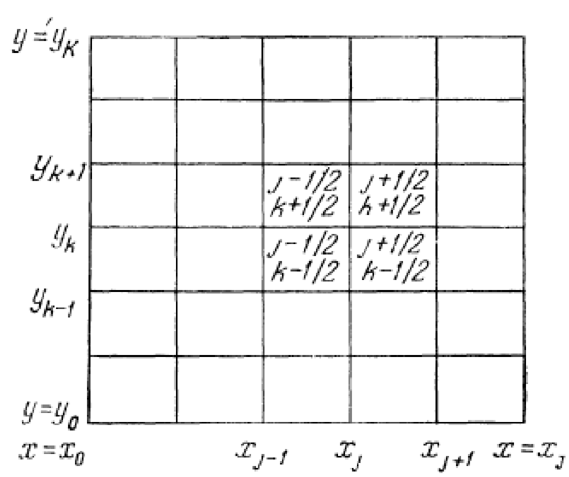
Bài 7. Âm học hai chiều

Phương trình sóng âm hai chiều. Lưới sai phân vuông. Định luật bảo toàn ở dạng sai phân. Tính toán các đại lượng hỗ trợ (“đại lượng lớn”) bằng phân rã gián đoạn. Đặt điều kiện biên. Tính đại lượng “lớn” trên biên.

Sơ đồ sai phân (2.5) được viết trong bài 2 để tính tích phân phương trình âm học một chiều khá đơn giản, tuy nhiên nó không hoàn toàn tầm thường khi áp dụng cho trường hợp hai hay ba chiều. Để minh họa chúng ta sẽ cùng xem xét cách áp dụng nó cho hệ phương trình vi phân, biểu diễn sự lan truyền của sóng âm trong hai chiều không gian x và y, có dạng:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}=0\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial p}{\partial t}+\rho_0 c_0^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0
\end{aligned}\qquad(7.1)$$



Hình 7.1

Ở đây $u=u(x,y,t)$, $v=v(x,y,t)$ – hai thành phần vận tốc của môi trường (tương ứng theo chiều x và y), $p=p(x,y,t)$ – áp suất trong môi trường. Các hằng số ρ_0 và c_0 có ý nghĩa giống như trong trường hợp một chiều, được viết trong bài 1.

Để xây dựng sơ đồ sai phân chúng ta bắt đầu từ việc tạo lưới sai phân. Để đơn giản ta sử dụng lưới hình vuông đều như hình 7.1. Lưới được tạo thành từ hai họ đường thẳng. Họ đầu tiên – các đường thẳng $x=x_j$, song song với trục y. Họ thứ hai – các đường thẳng $y=y_k$, song song trục x. Giả thiết đại lượng $h_x=x_j-x_{j-1}$ giống nhau đối với mọi giá trị j, còn $h_y=y_k-y_{k-1}$ – với mọi giá trị k, chúng được gọi là *các bước lưới* theo chiều x và y tương ứng. Hình vuông có các đỉnh $(x_{j-1}, y_{k-1}), (x_j, y_{k-1}), (x_j, y_k), (x_{j-1}, y_k)$ được gọi là *ô lưới* số $(j-1/2, k-1/2)$.

Các hàm $u(x,y,t), v(x,y,t), p(x,y,t)$ mô tả trạng thái môi trường tại thời điểm t, sẽ được xem là cố định trong khuôn khổ một ô lưới và các hằng số này được đánh số tương ứng ô lưới. Ví dụ đối với ô lưới số $(j-1/2, k-1/2)$ các hằng số này là $u_{j-1/2,k-1/2}, v_{j-1/2,k-1/2}, p_{j-1/2,k-1/2}$.

Quá trình tính được tiến hành tuần tự từng bước theo thời gian. Trong các bước tính riêng biệt, giá trị $\{(u,v,p)_{j-1/2,k-1/2}\}$ tại thời điểm $t = t_0$ được sử dụng để xác định các giá trị này, trong từng ô lưới, tại thời điểm tiếp theo $t = t_0 + \tau$, τ – bước thời gian. Giá trị của chúng tại thời điểm $t = t_0 + \tau$ sẽ được đánh số ở phía trên: $(u,v,p)^{j-1/2,k-1/2}$.

Để thu được các công thức tính, chúng ta sử dụng các hệ thức, là các định luật bảo toàn khối lượng, động lượng cho bài toán âm học đang xét:

$$\begin{aligned} &\oiint \rho_0 u dxdy + pdydt = 0 \\ &\oiint \rho_0 v dxdy + pdxdt = 0 \\ &\oiint pdxdy + \rho_0 c_0^2 (udydt + vdxdt) = 0 \end{aligned} \qquad . \qquad (7.2)$$

Các tính phân ở vế trái có thể tính theo mọi mặt kín trong không gian ba chiều x, y, t. Hệ phương trình vi phân (7.1) chính là hệ quả từ các định luật bảo toàn này.

Xét đẳng thức đầu tiên (7.2):

$$\oiint \rho_0 u dxdy + pdydt = 0$$

đối với ô lưới $(j-1/2, k-1/2)$ trong khoảng thời gian τ. Ta có

$$\rho_0 \left(u^{j-1/2,k-1/2} - u_{j-1/2,k-1/2}\right) h_x h_y + \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{y_{k-1}}^{y_k} \left[p(x_j, y, t) - p(x_{j-1}, y, t)\right] dydt = 0, \qquad (7.3)$$

Trong công thức này hạng tử $\int_{t_0}^{t_0+\tau}\int_{y_{k-1}}^{y_k} p(x_j, y, t)dydt$ là tích phân trên biên nằm giữa các ô lưới $(j-1/2, k-1/2)$ và $(j+1/2, k-1/2)$. Tọa độ x dọc theo đường biên này không đổi và bằng x_j. Khác với trường hợp một chiều được xét ở bài một, áp suất $p(x_j, y, t)$ thay đổi dọc theo biên ô lưới, thậm chí tại thời điểm $t = t_0$, bên trong ô lưới $(j-1/2, k-1/2)$ và $(j+1/2, k-1/2)$ các thông số cố định và bước thời gian τ rất nhỏ. Tính bất biến sẽ bị phá vỡ quanh các điểm góc, nơi xuất hiện dòng chảy phức tạp nhiều chiều. Tuy nhiên khi xây dựng sơ đồ sai phân chúng ta sẽ bỏ qua điều này, xem $p(x_j, y, t)$ không đổi trong khoảng thời gian từ t_0 tới $t_0 + \tau$. Giá trị không đổi này được kí hiệu $P_{j,k-1/2}$. Hiện tại, sau khi thu được nhiều thành quả khi dùng sơ đồ này, giả thiết trên có vẻ là đúng. Tuy nhiên lúc sơ đồ mới được xây dựng, rất khó quyết định đi bước này. Năm 1956 K.V Brushlinsky đã xây dựng được sơ đồ cho phương trình âm học với lời giải tính toán chính xác ở góc, theo các lời giải hàm bất biến của S.L. Sobolev. So sánh kết quả thu được khi sử dụng sơ đồ này và sơ đồ “thô” mà chúng ta đang mô tả, cho thấy chúng trùng nhau trên thực tế. Chỉ khi đó mới quyết định sử dụng sơ đồ “thô” này. Nghiên cứu của K.V Brushlinsky được tiến hành theo sáng kiến và dưới sự dẫn dắt của I.M Gelfand.

Quay trở lại với việc mô tả sơ đồ. Với giải thiết $p(x_j, y, t) = P_{j,k-1/2}$, từ công thức (7.3) ta có

$$\rho_0\left(u^{j-1/2,k-1/2} - u_{j-1/2,k-1/2}\right)h_x h_y + \tau h_y\left(P_{j,k-1/2} - P_{j-1,k-1/2}\right) = 0 \tag{7.5}$$

Tương tự đối với các đẳng thức khác trong (7.2):

$$\begin{gathered}
\rho_0\left(v^{j-1/2,k-1/2} - v_{j-1/2,k-1/2}\right)h_x h_y + \tau h_x\left(P_{j,k-1/2} - P_{j-1,k-1/2}\right) = 0 \\
\left(p^{j-1/2,k-1/2} - p_{j-1/2,k-1/2}\right)h_x h_y + \tau\rho_0 c_0^2 h_y\left(U_{j,k-1/2} - U_{j-1,k-1/2}\right) + \\
+ \tau\rho_0 c_0^2 h_x\left(V_{j-1/2,k} - U_{j-1/2,k-1}\right) = 0
\end{gathered} \tag{7.6}$$

Trong các công thức này, tạm thời các đại lượng P, U, V chưa được xác định, chúng phải được tính trên các biên của ô lưới (chúng ta gọi chúng là các đại lượng "**lớn**"). Tương tự như trường hợp sơ đồ một chiều, để tính các đại lượng này, chúng ta sử dụng bài toán mô phỏng "*phân rã gián đoạn*".

Giả sử trong nửa mặt phẳng $x < x_j$ trạng thái của môi trường tại một thời điểm nào đó được mô tả bởi các hằng số $(u, v, p)_{j-1/2,k-1/2}$, trong nửa mặt phẳng $x > x_j$ – các hằng số $(u, v, p)_{j+1/2,k-1/2}$.

Khi đó, như đã thấy ở bài 1, sóng âm được hình thành và lan truyền qua sang phải và trái với vận tốc âm thanh c_0; trên đường $x = x_j$ giá trị u, p được tính theo công thức tương tự (1.12):

$$u = U_{j,k-1/2} = \frac{u_{j-1/2,k-1/2} + u_{j+1/2,k-1/2}}{2} - \frac{p_{j+1/2,k-1/2} - p_{j-1/2,k-1/2}}{2\rho_0 c_0}$$
$$p = P_{j,k-1/2} = \frac{p_{j-1/2,k-1/2} + p_{j+1/2,k-1/2}}{2} - \rho_0 c_0 \frac{u_{j+1/2,k-1/2} - u_{j-1/2,k-1/2}}{2} \qquad (7.7)$$

Chúng sẽ được sử dụng trong các công thức (7.5) và (7.6). Chú ý rằng đại lượng $V_{j,k-1/2}$ không xuất hiện ở đây vì không cần thiết phải xác định nó.

Để tính đại lượng "lớn" $P_{j-1/2,k}, V_{j-1/2,k}$ chúng ta cùng xem xét bài toán tương tự về phân rã gián đoạn, xảy ra nếu như môi trường trong vùng $y < y_k$ đặc trưng bởi các thông số $(u, v, p)_{j-1/2,k-1/2}$, còn khi $y > y_j$ – các thông số $(u, v, p)_{j-1/2,k+1/2}$. Trên đường $y = y_k$ ta có

$$v = V_{j-1/2,k} = \frac{v_{j-1/2,k-1/2} + v_{j-1/2,k+1/2}}{2} - \frac{p_{j-1/2,k+1/2} - p_{j-1/2,k-1/2}}{2\rho_0 c_0}$$
$$p = P_{j-1/2,k} = \frac{p_{j-1/2,k-1/2} + p_{j-1/2,k+1/2}}{2} - \rho_0 c_0 \frac{v_{j-1/2,k+1/2} - v_{j-1/2,k-1/2}}{2} \qquad (7.8)$$

Đại lượng $U_{j-1/2,k}$ không cần thiết phải xác định.

Từ công thức (7.5), (7.6) ta có giá trị các đại lượng $(u,v,p)^{j-1/2,k-1/2}$ tại thời điểm $t = t_0 + \tau$ (tức là ở lớp “phía trên”):

$$
\begin{aligned}
u^{j-1/2,k-1/2} &= u_{j-1/2,k-1/2} - \frac{\tau}{\rho_0 h_x}\left(P_{j,k-1/2} - P_{j-1,k-1/2}\right),\\
v^{j-1/2,k-1/2} &= v_{j-1/2,k-1/2} - \frac{\tau}{\rho_0 h_y}\left(P_{j-1/2,k} - P_{j-1/2,k-1}\right),\\
p^{j-1/2,k-1/2} &= p_{j-1/2,k-1/2} - \frac{\tau}{h_x}\rho_0 c_0^2\left(U_{j,k-1/2} - U_{j-1,k-1/2}\right) - \\
&\quad - \frac{\tau}{h_y}\rho_0 c_0^2\left(V_{j-1/2,k} - V_{j-1/2,k-1}\right)
\end{aligned}
\tag{7.9}
$$

và sử dụng các công thức (7.7), (7.8) thu được các công thức tường minh phụ thuộc các giá trị $\left\{(u,v,p)_{j-1/2,k-1/2}\right\}$ tại thời điểm t_0 (ở lớp “dưới”). Có thể chứng minh rằng hệ phương trình sai phân này xấp xỉ bậc một hệ phương trình vi phân (7.1) nếu như các hàm $u(x,y,t), v(x,y,t), p(x,y,t)$ đủ *mượt*.

Cho đến bây giờ chúng ta dẫn ra sơ đồ sai phân dựa trên giả thiết, rằng lưới không bị giới hạn trong hai chiều x, y. Trên thực tế vùng tính toán luôn bị giới hạn, vì thế cần cho điều kiện trên biên. Để đơn giản, chúng ta xét trường hợp khi vùng tính toán là hình chữ nhật bị giới hạn bởi các đường $x = x_0, x = x_j, y = y_0, y = y_k$. Để tính tất cả các giá trị $(u,v,p)^{j-1/2,k-1/2}$ sử dụng hệ (7.9) cần thêm các công thức để tính các đại lượng lớn sau:

$P_{0,k-1/2}, U_{0,k-1/2}$ tại biên trái $x = x_0$

$P_{J,k-1/2}, U_{J,k-1/2}$ tại biên trái $x = x_J$

$P_{j-1/2,0}, V_{j-1/2,0}$ tại biên trái $y = y_0$

$P_{j-1/2,K}, U_{j-1/2,K}$ tại biên trái $y = y_K$.

Xét trên khoảng $y_{k-1} < y < y_k$ biên trái. Tương tự trường hợp một chiều, đại lượng lớn có thể tính thông qua bất biến Riemann dọc đường đặc trưng $dx/dt = -c_0$ hệ phương trình 1D:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \end{aligned} \tag{7.10}$$

thu được từ (7.1) bằng cách loại bỏ đạo hàm theo y. Khi đó ta có

$$U_{0,k-1/2} - \frac{1}{\rho_0 c_0} P_{0,k-1/2} = u_{1/2,k-1/2} - \frac{1}{\rho_0 c_0} p_{1/2,k-1/2} \tag{7.11}$$

Nếu như trên biên $x = x_0$ đặt điều kiện

$$\alpha_0(y,t)u(x_0,y,t) + \beta_0(y,t)p(x_0,y,t) = f_0(y,t) \tag{7.12}$$

thì xấp xỉ của nó trên khoảng $y_{k-1} < y < y_k$ sẽ là

$$\alpha_{0,k-1/2}U_{0,k-1/2} + \beta_{0,k-1/2}P_{0,k-1/2} = f_{0,k-1/2}\,. \tag{7.13}$$

Từ (7.11) và (7.13) ta có thể tính $U_{0,k-1/2}, P_{0,k-1/2}$. Điều kiện cần là

$$\begin{vmatrix} \alpha_0(y,t) & \beta_0(y,t) \\ 1 & -\dfrac{1}{\rho_0 c_0} \end{vmatrix} \neq 0$$

như điều kiện đầu (5.2) trường hợp một chiều.

Nếu như điều kiện biên có dạng tổng quát hơn (7.12) và có chứa hàm $v(x_0,y,t)$ thì sau khi xấp xỉ nó có dạng

$$\alpha_{0,k-1/2}U_{0,k-1/2} + \beta_{0,k-1/2}P_{0,k-1/2} + \gamma_{0,k-1/2}V_{0,k-1/2} = f_{0,k-1/2}.$$

Có thể loại bỏ $V_{0,k-1/2}$ từ phương trình $\partial v / \partial t$ trong hệ (7.10): $V_{0,k-1/2} = v_{1/2,k-1/2}$. Tương tự cho các đại lượng lớn $(P,U)_{J,k-1/2}$ tại biên phải $x = x_J$. Khi đó hệ thức (7.11) được thay thế bằng

$$U_{J,k-1/2} + \frac{1}{\rho_0 c_0} P_{J,k-1/2} = u_{J-1/2,k-1/2} + \frac{1}{\rho_0 c_0} p_{J-1/2,k-1/2},$$

biểu diễn bất biến $u + p/(\rho_0 c_0)$ dọc đường đặc trưng $dx/dt = c_0$, đồng thời sử dụng điều kiện cho biên phải.

Để tính các đại lượng lớn ở biên dưới $(y = y_0)$ và trên $(y = y_K)$của vùng tính, sử dụng hệ phương trình một chiều

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ &\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{aligned} \tag{7.14}$$

thu được bằng cách loại bỏ đạo hàm theo x trong (7.1). Các bước kế tiếp tương tự như ở trên.