Bài 9: Sơ đồ sai phân một chiều dạng tường minh cho hệ phương trình Hyperbol bất kì

Hệ đối xứng. Tích phân năng lượng. Biến đổi hệ phương trình về dạng chính tắc. Sơ đồ sai phân. Bất đẳng thức cơ sở - Mô hình sai phân của tích phân năng lượng. Điều kiện ổn định. Tạo điều kiện biên phù hợp. Điều kiện biên phân tán đảm bảo tính ổn định cho sơ đồ với bước chia lưới đủ nhỏ. Xây dựng sơ đồ cho hệ phương trình Hyperbol không đối xứng. Tùy chỉnh sơ đồ trong trường hợp các hệ số thay đổi

Thuật toán xây dựng sơ đồ sai phân cho phương trình âm học khá đơn giản và mang tính trực quan cao, vì vậy chúng ta hy vọng và mong muốn rằng, trên cở sở thuật toán đã có, có thể xây dựng được sơ đồ sai phân cho hệ phương trình vi phân tuyến tính bậc một dạng hyperbol bất kì. Trong phạm vi của bài này, chúng ta chỉ trình bày vấn đề trên đối với trường hợp hệ phương trình là hệ đối xứng.

Như đã biết, từ lý thuyết về phương trình dạng hyperbol (xem giáo trình [34]), thì hệ phương trình

$$A\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + B\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + C\frac{\partial \vec{u}}{\partial y} = Q\vec{u} + \vec{f} \tag{9.1}$$

được gọi là hệ phương trình t–hyperbol (theo Friedrichs), nếu như các ma trận A, B, C là các ma trận đối xứng, đồng thời ma trận A là ma trận xác định dương.

Giả sử các phần tử của các ma trận vuông m^* chiều A, B, C là các hàm trơn tru theo các biến x, y, t. (nếu các phần tử của các ma trận trên phụ thuộc thêm biến u, thì hệ phương trình được gọi là hệ phương trình bán tuyến tính). Ma trận Q trong hệ (9.1) không nhất thiết phải là ma trận đối xứng, các phần tử của nó và các thành phần véc–tơ hàm f có thể phụ thuộc theo các biến x, y, t.

Đối với hệ phương trình đối xứng t–hyperbol, có thể đưa ra một đẳng thức quan trọng, làm nền tảng cho việc xây dựng lý thuyết đối của các hệ phương trình trên. Nhân vô hướng phương trình (9.1) với véc–tơ $2\vec{u}$, sau một vài phép biến đổi không quá phức tạp, sử dụng tính chất đối xứng của các ma trận A, B, C, có thể thu được đẳng thức thỏa mãn cho mọi nghiệm (9.1):

$$\frac{\partial}{\partial t}(A\vec{u},\vec{u}) + \frac{\partial}{\partial x}(B\vec{u},\vec{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(C\vec{u},\vec{u}) = (D\vec{u},\vec{u}) + 2(\vec{f},\vec{u}) \tag{9.2}$$

ở đây $(\vec{u},\vec{v})$—tích vô hướng của hai véc–tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$,

$$D = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} - \left(Q + Q^*\right),$$

Q^*—ma trận chuyển vị của ma trận Q. Sau khi lấy tích phân phương trình trên theo miền Ω bất kì, là hình cầu homeomorphic trong không gian ba chiều x, y, t, thuộc miền xác định của $\vec{u}$, và biến đổi tích phân khối vế trái (9.2) thành tích phân trên mặt Γ, giới hạn miền Ω, chúng ta sẽ thu được đẳng thức tích phân sau

$$\oiint_{\Gamma} \left([\zeta A + \xi B + \eta C]\vec{u}, \vec{u} \right) d\Gamma = \iiint_{\Omega} \left[(D\vec{u}, \vec{u}) + 2\left(\vec{f}, \vec{u}\right) \right] d\Omega \tag{9.3}$$

Với (ξ, η, ζ)— là véc–tơ pháp tuyến đơn vị của mặt Γ, có hướng ra phía ngoài. Chúng ta sẽ không đi xem xét cụ thể các bước để thu được công thức (9.2) và (9.3) (đọc thêm ví dụ trong bài 9 giáo trình [34]). Đẳng thức (9.3) thu được ở trên gọi là *tích phân năng lượng* của hệ phương trình đối xứng (9.1). Ở dạng sai phân, nó sẽ đóng vai trò quan trọng trong việc lập luận về tính ổn định của sơ đồ, mà chúng ta sẽ trình bày ở phần dưới đây.

Trong giới hạn của bài này chúng ta chỉ đề cập đến trường hợp một chiều, khi phương trình (9.1) chỉ phụ thuộc vào biến thời gian t và một biến không gian x. Để đơn giản, chúng ta giả sử rằng, các ma trận A, B là các ma trận hằng (tức các hệ số của ma trận là các hằng số), còn vế phải của phương trình bằng không

$$A\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + B\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = 0 \tag{9.4}$$

Khi đó, dạng vi phân của tích phân năng lượng (9.2) là:

$$\frac{\partial}{\partial t}(A\vec{u}, \vec{u}) + \frac{\partial}{\partial x}(B\vec{u}, \vec{u}) = 0 \tag{9.5}$$

còn định luật bảo toàn năng lượng (9.3) —

$$\oint_{\Gamma} (A\vec{u}, \vec{u})dx - (B\vec{u}, \vec{u})dt = 0 \tag{9.6}$$

với Γ— chu tuyến kín bất kì thuộc mặt phẳng (x, t).

Biến đổi véc–tơ hàm $\vec{u}$ ở dạng $\vec{u} = \Lambda\vec{v}$, với ma trận Λ là ma trận khả nghịch. Hệ phương trình (9.4) trở thành

$$\Lambda^* A\Lambda \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \Lambda^* B\Lambda \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = 0 \qquad (9.7)$$

ở đây Λ^*— ma trận chuyển vị của ma trận Λ.

Bởi vì ma trận A và B là các trận đối xứng, ngoài ra ma trận A— là ma trận xác định dương, như đã biết trong phần đại số tuyến tính đại cương, luôn có thể tìm được một ma trận Λ sao cho $\Lambda^* A\Lambda$ là ma trận đơn vị, còn ma trận $\Lambda^* B\Lambda$— ma trận đường chéo, chúng ta sẽ kí hiệu các phần tử trên đường chéo của nó là $\mu_m \left(m = 1,\ldots,m^*\right)$. Theo định luật quán tính của dạng toàn phương thì số các giá trị âm và dương trong tập hợp các giá trị μ_m chỉ phụ thuộc vào ma trận B, và không phụ thuộc vào cách biến đổi về dạng đường chéo. Trong trường hợp đang xét thì các giá trị μ_m là nghiệm của phương trình đặc trưng

$$\det\|\mu A + B\| = 0 \qquad (9.8)$$

Để xác định ma trận Λ chúng ta có thể tiến hành các bước như sau. Phép biến đổi $\vec{u} = H\vec{v}_1$, với H là ma trận trực chuẩn có các cột là các véc–tơ riêng chuẩn hóa của ma trận A, biến ma trận A về dạng được chéo $A_1 = H^* AH$, với các phần tử đường chéo λ_m— là các giá trị riêng của ma trận A, tức là nghiệm của phương trình đặc trưng $\det\|A - \lambda I\| = 0$. Đồng thời tất cả các giá trị $\lambda_m > 0$ bởi vì ma trận A xác định dương. Ma trận B lúc đó trở thành ma trận $B_1 = H^* BH$. Tiếp theo thay $\vec{v}_1 = D\vec{v}_2$, D là ma trận đường chéo với các phần tử đường chéo bằng $1/\sqrt{\lambda_m}$, sẽ biến ma trận A_1 thành ma trận đơn vị $D^* A_1 D = I$, còn ma trận B_1 thành ma trận $B_2 = D^* B_1 D$. Cuối cùng, phép đổi biến $\vec{v}_2 = K\vec{v}$, với K là ma trận trực giao, được tạo thành từ các véc–tơ riêng của ma trận B_2, sẽ giữ nguyên ma trận đơn vị *I*, và biến ma trận B_2 thành ma trận đường chéo $M = K^* B_2 K$ với các phần tử trên đường chéo chính của ma trận M sẽ bằng μ_m. Nói tóm lại, ma trận Λ cần tìm chính là tích của tất các các ma trận phía trên $\Lambda = HDK$.

Dạng chính tắc của hệ phương trình khi đó có dạng

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + M \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = 0 \tag{9.9}$$

Nếu xét hệ không có điều kiện biên thì có thể nó tách thành m^* phương trình độc lập với các ẩn là $v^{(m)}$:

$$\frac{\partial v^{(m)}}{\partial t} + \mu_m \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x} = 0 \tag{9.10}$$

Biến $v^{(m)}$ được gọi là bất biến Rimann, có giá trị không đổi dọc theo đường đặc trưng $dx/dt = \mu_m$. Yếu tố này sẽ đơn giản hóa quá trình xây dựng sơ đồ sai phân.

Giống như ở các bài trước, chúng ta sẽ tạo lưới đều với các nút lưới $\{x_j\}$ ($x_j - x_{j-1} = h$) và không bị chặn ở hai phía của trục x. Tập hợp các giá trị $\{\vec{u}_{j-1/2}\}$ được cho bởi véc–tơ hàm $\vec{u}(x,t)$ ở lớp dưới $t = t_0$, còn $\{\vec{u}^{\,j-1/2}\}$ - lớp trên $t = t_0 + \tau$. Chúng liên hệ với nhau theo công thức

$$A\frac{\vec{u}^{\,j-1/2} - \vec{u}_{j-1/2}}{\tau} + B\frac{\vec{U}_j - \vec{U}_{j-1}}{h} = 0 \tag{9.11}$$

$\vec{U}_j$ — đại lượng "lớn" bổ sung. Các đại lượng này được tìm ở dạng lời giải của bài toán phân rã gián đoạn cho hệ phương trình (9.4) với điều kiện đầu:

$$\vec{u} = \begin{cases} \vec{u}_{j-1/2}, & x < x_j \\ \vec{u}_{j+1/2}, & x > x_j \end{cases} \tag{9.12}$$

Để thuận tiện chúng ta biểu diễn nghiệm (9.12) ở dạng véc–tơ hàm $\vec{v} = \Lambda^{-1}\vec{u}$, khi đó hệ có dạng chính tắc (9.9), sơ đồ sai phân (9.11) có dạng

$$\frac{\vec{v}^{\,j-1/2} - \vec{v}_{j-1/2}}{\tau} + B\frac{\vec{V}_j - \vec{V}_{j-1}}{h} = 0 \tag{9.13}$$

Các thành phần của véc–tơ $\vec{V}_j$ được xác định theo công thức

$$V_j^{(m)} = \begin{cases} v_{j-1/2}^{(m)}, & \mu_m > 0 \\ v_{j+1/2}^{(m)}, & \mu_m < 0 \end{cases} \tag{9.14}$$

Trong trường hợp $\mu_m = 0$, thì giá trị $V_j^{(m)}$ có thể nhận giá trị bất kì, bởi vì trong công thức (9.13) chúng sẽ nhân với μ_m.

Từ các công thức (9.13), (9.14) suy ra, mỗi hạng tử tương ứng với chỉ số m, (chúng ta sẽ không kí hiệu vào), sẽ có các đẳng thức sau

$$v^{j-1/2} = \begin{cases} \left(1-\mu_m \dfrac{\tau}{h}\right) v_{j-1/2} + \mu_m \dfrac{\tau}{h} v_{j-3/2}, & \mu_m > 0 \\ \left(1+\mu_m \dfrac{\tau}{h}\right) v_{j-1/2} - \mu_m \dfrac{\tau}{h} v_{j+1/2}, & \mu_m < 0 \\ v_{j-1/2} & \mu_m = 0 \end{cases} \qquad (9.15)$$

Còn bây giờ, tương tự như trong bài 3, khi $0 < v \le 1$ từ đẳng thức $c = (1-v)a + vb$ thu được bất đẳng thức $c^2 \le (1-v)a^2 + vb^2$ bằng các phép biến đổi sơ cấp (3.11). Kết quả chúng ta sẽ có bất phương trình:

$$\frac{\left(v^{j-1/2}\right)^2 - \left(v_{j-1/2}\right)^2}{\tau} + \mu_m \frac{V_j^2 - V_{j-1}^2}{h} \le 0$$

cho từng hạng tử, nếu thõa mãn điều kiện $|\mu_m| \dfrac{\tau}{h} \le 1$.

Cộng tất cả các bất đẳng thức cùng chiều lại với nhau sẽ được bất đẳng vec-tơ :

$$\frac{\left(\vec{v}^{\,j-1/2}, \vec{v}^{\,j-1/2}\right)^2 - \left(\vec{v}_{j-1/2}, \vec{v}_{j-1/2}\right)}{\tau} + \frac{\left(M\vec{V}_j, \vec{V}_j\right) - \left(M\vec{V}_{j-1}, \vec{V}_{j-1}\right)}{h} \le 0 \qquad (9.16)$$

với điều kiện bước thời gian τ thõa mãn

$$\frac{\tau}{h} \max_m |\mu_m| \le 1 \qquad (9.17)$$

Trước khi chuyển sang phần tiếp, chúng ta sẽ làm một chú ý như sau (tương tự như trong bài 3 khi nghiên cứu về phương trình âm học). Phép chứng minh bất đẳng thức (9.16) sẽ cho kết quả có chứa hạng tử $v_{j-3/2}^{(m)}$ khi $\mu_m > 0$, và hạng tử $v_{j+1/2}^{(m)}$ nếu $\mu_m < 0$. Bất đẳng thức (9.16) sẽ luôn thõa mãn với mọi giá trị V_j, xác định theo công thức (9.14). Tính chất này chúng ta sẽ cần cho sau này, khi xem xét đến bài toán có điều kiện biên.

Nhớ lại, chúng ta đã sử dụng các phép biến đổi ma trận $\vec{u}=\Lambda\vec{v},\ \Lambda^{*}A\Lambda=I,\ \Lambda^{*}B\Lambda=M$. Bất đẳng thức (9.16) thu được ở trên có thể viết lại như sau

$$\frac{\left(A\vec{u}^{\,j-1/2},\vec{u}^{\,j-1/2}\right)-\left(A\vec{u}_{j-1/2},\vec{u}_{j-1/2}\right)}{\tau}+\frac{\left(B\vec{U}_{j},\vec{U}_{j}\right)-\left(B\vec{U}_{j-1},\vec{U}_{j}\right)}{h}\le 0 \qquad (9.18)$$

Bất phương trình ở dạng sai phân này tương ứng với tích phân năng lượng (9.5), (9.6) xét cho khoảng lưới $x_{j-1}\le x\le x_{j}$, trong khoảng thời gian tính toán chuyển từ lớp dưới lên lớp trên. Cộng tất cả các bất đẳng thức (9.18) với chỉ số j chạy từ $-\infty$ đến $+\infty$, với giả thiết tổng $\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(A\vec{u}_{j-1/2},\vec{u}_{j-1/2}\right)$, với các dữ liệu ban đầu, bị giới hạn, chúng ta sẽ có

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(A\vec{u}^{\,i-1/2},\vec{u}^{\,j-1/2}\right)\le\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(A\vec{u}_{j-1/2},\vec{u}_{j-1/2}\right) \qquad (9.19)$$

nếu như thỏa mãn điều kiện (9.17). Tính ổn định của sơ đồ sai phân không có điều kiện biên đang xét được chính minh tương tự, nếu bước thời gian thỏa mãn bất đẳng thức $\frac{\tau}{h}\max_{m}\left|\mu_{m}\right|\le 1$.

Điều kiện đủ (9.19) cho tính ổn định vừa thu được cũng chính là điều kiện cần. Khẳng định này có thể chứng mình một cách dễ dàng bằng cách áp dụng phương pháp phổ Fourier cho phương trình (9.15).

Bởi vì các giá trị μ_{m} là các nghiệm của phương trình đặc trưng

$$\det\left\|\mu A+B\right\|=0$$

nên giá trị tới hạn của bước thời gian có thể biểu diễn dưới dạng:

$$\frac{\tau}{h}\le\xi \ , \qquad (9.20)$$

với $\xi > 0$—giá trị lớn nhất có thể, mà khi đó ma trận $A \pm \xi B$ không âm, tức là $(A\vec{u},\vec{u}) \pm \xi(B\vec{u},\vec{u}) \geq 0$ với véc–tơ $\vec{u}$ bất kì.

Bây giờ chúng ta chuyển sang xem xét bài toán hỗn hợp với điều kiện đầu $\vec{u}(x,0) = \vec{u}_0(x)$, $x_I \leq x \leq x_{II}$, và các điều kiện biên bên trái và bên phải như sau

$$\begin{aligned} \Phi_I \vec{u}(x_I,t) &= \vec{g}_I(t) \\ \Phi_{II} \vec{u}(x_{II},t) &= \vec{g}_{II}(t) \end{aligned} \tag{9.21}$$

Φ_I, Φ_{II}—các ma trận tam giác với số hàng là m_I, m_{II}; $\vec{g}_I(t), \vec{g}_{II}(t)$— các véc–tơ hàm cho trước, có chiều tương ứng với chiều véc–tơ hàm $\vec{u}$ tại thời điểm $t = 0$.

Như đã biết từ lý thuyết về phương trình hyperbol (xem giáo trình [34]), để bài toán thiết lập được chính xác, điều kiện biên (9.21) không thể cho bất kỳ. Kí hiệu m_+— số phần tử mang giá trị dương trong tập các giá trị μ_m ở trên, còn m_-— số phần tử mang giá trị âm (rõ ràng $m_0 = m^* - m_+ - m_-$ là số phần tử bằng không). Khi đó để điều kiện biên bên trái đã cho ở trên là hợp lệ, thì cần có $m_I = m_+$ điều kiện biên độc lập lẫn nhau (tức bằng số đường đặc trưng xuất phát từ biên trái). Còn biên bên phải cần có $m_{II} = m_-$ điều kiện không phụ thuộc lẫn nhau (bằng số đường đặc trưng xuất phát từ biên phải). Đồng thời điều kiện biên không được phép cho bởi các tổ hợp các biến, tương ứng các bất biến riemann trên các đường đặc trưng "tiến gần" tới biên.

Ngoài ta chúng ta sẽ giả thiết rằng, điều kiện biên phân tán, giống như bài 13 trong giáo trình [34]: *tại mỗi điểm trên biên, với mọi véc–tơ hàm $\vec{u}$ bất kì thỏa mãn điều kiện biên, các bất đẳng thức sau đúng:*

$$\begin{aligned} &(B\vec{u},\vec{u}) \leq 0 \ \textit{tại biên bên trái} \ x = x_I \\ &(B\vec{u},\vec{u}) \geq 0 \ \textit{tại biên bên phải} \ x = x_{II} \end{aligned} \tag{9.22}$$

Tiếp theo chúng ta sẽ xây dựng sơ đồ sai phân cho bài toán. Như mọi khi, ta chia đoạn $x_I \leq x \leq x_{II}$ thành J khoảng, bởi các nút lưới $\{x_j\}$, trong đó $x_0 = x_I$, $x_J = x_{II}$. Để đơn giản, xét lưới đều: $x_j - x_{j-1} = h$. Để thuận tiện, chúng ta sẽ trình bày sơ đồ sai phân cho véc–tơ hàm $\vec{v}$. Đối với các khoảng lưới phía trong, sơ đồ sai phân có dạng (9.13), (9.14). Ngoài ra cần bổ sung thêm các phương trình để tính các đại lượng "lớn" $\vec{V}_0, \vec{V}_J$ trên biên. Đối với nút biên bên trái $x_0 = x_I$ hệ m^* phương trình tương ứng để tính véc–tơ $\vec{V}_0$ bao gồm: m_+ phương trình được cho bởi điều kiện biên tương ứng với các giá trị $\mu_m > 0$. Đối với m_- giá trị, tương $\mu_m < 0$, thì thu được từ phương trình (9.14) tại $j=0$:

$$V_0^{(m)} = v_{1/2}^{(m)}$$

Tương tự với m_0 giá trị $V_0^{(m)}$ tương ứng $\mu_m = 0$. Các giá trị của véc–tơ $\vec{V}_J$ cho biên bên phải $x = x_J$ cũng được xác định hoàn toàn tương tự.

Hệ phương trình sai phân đối với từng hạng tử véc–tơ hàm $\vec{v}$ như vậy là hoàn toàn được xác định. Để biểu diễn nó thông qua các hạng tử của véc–tơ hàm $\vec{u}$ sử dụng phép biến đổi nghịch $\vec{v} = \Lambda^{-1}\vec{u}$ (lưu ý rằng, trong phần lớn các trường hợp, có thể tìm các giá trị $\vec{v}^{\,j-1/2}$ ở lớp trên, chỉ khi đó chúng ta mới đi xác định các giá trị $\vec{u}^{\,j-1/2}$, tuy nhiên việc này cũng không bắt buộc cho từng bước tính toán, nếu như không cần thiết).

Như vậy các yếu tố cần thiết để khảo sát tính ổn định cho sơ đồ sai phân thu được đã sẵn sàng. Sau khi cộng tất cả các bất đẳng thức trong (9.16) theo chỉ số j, với bước thời gian τ thõa mãn điều kiện (9.17) hoặc (9.20), chúng ta có

$$\sum_{j=1}^{J}\left(\vec{v}^{\,j-1/2}, \vec{v}^{\,j-1/2}\right) \le \sum_{j=1}^{J}\left(\vec{v}_{j-1/2}, \vec{v}_{j-1/2}\right) + \frac{\tau}{h}\left[\left(M\vec{V}_0, \vec{V}_0\right) - \left(M\vec{V}_J, \vec{V}_J\right)\right],$$

Khi thu được bất phương trình này, theo điểm chú ý sau khi dẫn ra bất phương trình (9.16) ở phía trên, đối với các giá trị tại $j = 1$ và $j = J$ sử dụng các giá trị "cận biên" cho trường hợp các đường đặc trưng, "xuất phát" từ biên vùng tính, đang "tự do". Các hệ thức dọc các đường đặc trưng này được thay thế bởi điều kiện biên tán xạ, mà khi đó

$$\left(M\vec{V}_0, \vec{V}_0\right) \le 0, \left(M\vec{V}_J, \vec{V}_J\right) \ge 0.$$

Đối với véc–tơ $\vec{u}$ cũng cộng tất cả các bất đẳng thức (9.18) lại với nhau, chúng ta sẽ thu được bất đẳng thức

$$\sum_{j=1}^{J}\left(A\vec{u}^{\,j-1/2},\vec{u}^{\,j-1/2}\right)\le\sum_{j=1}^{J}\left(A\vec{u}_{j-1/2},\vec{u}_{j-1/2}\right)+\frac{\tau}{h}\left[\left(B\vec{U}_0,\vec{U}_0\right)-\left(B\vec{U}_J,\vec{U}_J\right)\right]. \qquad (9.23)$$

Do điều kiện biên phân tán, nên từ điều kiện (9.22) chúng ta luôn có các bất đẳng thức

$$\left(B\vec{U}_0,\vec{U}_0\right)\le 0,\ \left(B\vec{U}_J,\vec{U}_J\right)\ge 0 \qquad (9.24)$$

Từ đó suy ra

$$\sum_{j=1}^{J}\left(A\vec{u}^{\,j-1/2},\vec{u}^{\,j-1/2}\right)\le\sum_{j=1}^{J}\left(A\vec{u}_{j-1/2},\vec{u}_{j-1/2}\right),$$

nếu bước thời gian τ thõa mãn điều kiện (9.17) hoặc (9.20). Điều này có nghĩa là sơ đồ sai phân cho bài toán hỗn hợp ổn định trong chuẩn hàm lưới tương ứng.

Nhấn mạnh thêm một lưu ý rất quan trọng đó là cho đến bây giờ chúng ta mới chỉ xem xét cho hệ phương trình dạng

$$A\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+B\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}=0$$

với A,B là các ma trận đối xứng, đồng thời ma trân A là ma trận xác định dương.

Từ thuật toán xây dựng sơ đồ sai phân ở trên, chúng ta sẽ mở rộng cho hệ phương trình hyperbol dạng sau

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+C\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}=0 \qquad (9.25)$$

với C là ma trận bất kì (không bắt buộc là ma trận đối xứng và để đơn giản giả sử các phần tử của C là các hằng số). Để làm việc này chúng ta chỉ cần tìm các nghiệm của phương trình đặc trưng tương ứng cho hệ (9.25). Giả thiết rằng λ — nghiệm của phương trình đặc trưng

$$\det\left\|C-\lambda I\right\|=0$$

hay cũng chính là nghiệm của phương trình

$$\det\left\|C^{*}-\lambda I\right\|=0$$

$\vec{z}$—véc–tơ riêng của ma trận C^* (C^*là ma trận chuyển vị của ma trận C), tương ứng với giá trị riêng λ, tức là $C^*\vec{z}=\lambda\vec{z}$. Khi đó $\vec{z}^*C=\lambda\vec{z}^*$, với $\vec{z}^*$—véc–tơ-hàng được gọi là véc–tơ riêng trái của ma trận C. Từ phương trình (9.25) dễ dàng thu được

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{z},\vec{u})+\lambda\frac{\partial}{\partial x}(\vec{z},\vec{u})=0,$$

tức là, dọc theo đường đặc trưng $dx/dt=\lambda$, luôn thõa mãn hệ thức

$$(\vec{z},\vec{u})=const$$

Hệ (9.25) hyperbolic nếu như ma trận C^* có một hệ hoành chỉnh gồm m^* vec-tơ riêng tuyến tính độc lập. Thực tế, chúng ta đã trình bày thuật toán chuyển hệ phương trình (9.25) về dạng chính tắc

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+M\frac{\partial\vec{v}}{\partial x}=0$$

trong đó M là ma trận đường chéo. Hệ phương trình trên thu được bằng cách biến đổi véc–tơ $\vec{v}=L\vec{u}$, với L là ma trận có các hàng là các véc–tơ riêng của ma trận C^*. Sau bước này sơ đồ sai phân đang xét có thể được hiện thực hóa đối với hệ (9.25), ví dụ ở dạng các phương trình

$$\frac{\vec{u}^{\,j-1/2}-\vec{u}_{j-1/2}}{\tau}+C\frac{\vec{U}_j+\vec{U}_{j-1}}{h}=0 \quad , \tag{9.26}$$

các đại lượng "lớn" khi đó sẽ được xác định dựa trên dạng chính tắc của hệ, giống như đã nói ở các phần trước.

Một điểm đặc biệt quan trọng đó là việc chứng minh tính hội tụ của sơ đồ trên và thảo luận các vấn đề về tính phân tán của điều kiện biên chỉ có thể khi hệ (9.25) với ma trận C không đối xứng có thể trở thành hệ đối xứng, tức là bằng cách nhân với một ma trận đối xứng xác định dương nào đó, hoặc bằng cách biến đổi vec-tơ hàm cần tìm, hệ (9.25) được đưa về dạng đối xứng (9.4). Trong trường hợp riêng, phép đối xứng hóa trên chính là phép biến đổi đưa hệ (9.25) về dạng chính tắc với ma trận đường chéo *M*.

Ở dạng tầm thường các câu hỏi về phép đối xứng hóa nảy sinh ngay cả với các phương trình âm học (1.1), được viết ở dạng

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

hoạc viết ở dạng ma trận

$$\begin{Vmatrix} \rho_0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\rho_0 c_0^2} \end{Vmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = 0$$

Chúng ta sẽ thấy rằng, trong một số trường hợp, ví dụ như đối với hệ bán tuyến tính các phương trình khí động lực học (xem bài 22), thì trên thực tế quá trình đối xứng hóa khá phức tạp. Và để đơn giản hóa, như chúng ta vừa trình bày ở trên, có thể xây dựng sơ đồ sai phân mà không cần đối xứng hóa.

Để kết thúc bài, chúng ta sẽ xem xét một số thay đổi của thuật toán này khi ma trận trong phương trình (9.4) có các phần tử là các hàm phụ thuộc biến x,t. Một cách tổng quan hệ được cho ở dạng *phân kỳ*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[A(x,t)\bar{u}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[B(x,t)\bar{u}\right] = Q(x,t)\bar{u} + f \quad . \tag{9.27}$$

Yêu cầu về tính hyperbolic giả thiết rằng, việc đưa phương trình về dạng chính tắc bằng phép biến đổi $\bar{u} = \Lambda\bar{v}$ có thể được đối với mọi điểm (x,t). Tất nhiên khi đó ma trận chuyển Λ từ hàm $\bar{u}$ sang "bất biến Riemann" $\bar{v}$ vẫn được giữ nguyên tại mỗi điểm (x,t), cũng như đối với nghiệm của phương trình đặc trưng $\mu_m = \mu_m(x,t)$. Suy ra, các giá trị m_+, m_-, m_0, xác định cấu trúc các phương trình của các đại lượng "lớn", lúc này sẽ phụ thuộc vào các điểm (x,t). Khi đó sẽ xuất hiện vế phải trong phương trình chính tắc (9.9) ngay cả khi phương trình gốc (9.27) thuần nhất:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + M(x,t)\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = H(x,t)\bar{v} + \bar{g}(x,t) \tag{9.28}$$

$H(x,t)$ – ma trận với các phần tử là các hàm phụ thuộc vào biến x,t. Sự có mặt của vế phải trong phương trình gốc (9.27) tất yếu sẽ mang một " lượng bổ sung" vào vế phải phương trình (9.28).

Sự vắng mặt của vế phải phương trình (9.27) tất nhiên phải xem xét trong các định luật bảo toàn dạng sai phân (9.11). Khi mô tả chúng trong mỗi khoảng lưới, phương trình (9.11) sẽ có dạng

$$\left(A^{j-1/2}\vec{u}^{\,j-1/2} - A_{j-1/2}\vec{u}_{j-1/2}\right) + \frac{\tau}{x_j - x_{j-1}}\left(B_j\vec{U}_j - B_{j-1}\vec{U}_{j-1}\right) = \tau\left(Q_{j-1/2}\vec{u}_{j-1/2} + \vec{f}_{j-1/2}\right) \qquad (9.29)$$

Khi xác định các giá trị "lớn" $\vec{U}_j$, độ chính xác bậc một của sơ đồ sai phân được bảo toàn kể cả trong trường hợp, nếu như sử dụng đẳng thức (9.14) cho trường hợp đồng nhất, khi mà cần biến đổi vecto-hàm $\vec{u} = \Lambda\vec{v}$. Để chính xác hơn cần phải dẫn ra các phương trình sai phân tương ứng, xuất phát từ hệ (9.28). Xấp xỉ bậc một được bảo toàn chính thức khi tính vế phải trong các phương trình (9.29) sử dụng các đại lượng $\vec{u}_{j-1/2}$ ở lớp "dưới". Tuy nhiên trong một vài trường hợp vẫn dùng các đại lượng $\vec{u}^{\,j-1/2}$ ở lớp "trên" hoặc giá trị trung bình $\frac{1}{2}\left(\vec{u}_{j-1/2} + \vec{u}^{\,j-1/2}\right)$ để tính vế phải.