Bài 3. Dòng chảy siêu âm của khí khi vận tốc dòng tăng liên tục.(Dòng chảy Pran-tơ Mai-ơ)

Ở bài này, ta sẽ xem xét dạng đơn giản nhất của dòng chảy siêu âm của khí — dòng chảy tịnh tiến đều. Khi đó các phần tử chất lỏng chuyển động theo những đường song song với vận tốc không đổi. Quỹ đạo của các phần tử khí chính là những đường dòng không cắt nhau.

Nếu dòng không gặp phải bất cứ vật cản nào dưới dạng vật rắn hoặc tấm chắn thì nó sẽ không chịu bất cứ một ảnh hưởng nào. Ví dụ đơn giản nhất là một tấm chắn rắn phẳng có thể làm biến đổi đặc tính của dòng tịnh tiến đều. Trước tiên ta xem xét trường hợp đối với tấm chắn được đặt song song với hướng dòng, hay nói cách khác nó trùng với một trong các đường dòng. Nếu dòng khí động choán phần không gian rất lớn phía trên tấm chắn và bản thân tấm chắn có chiều dài vô cùng lớn thì nó sẽ không gây ra bất cứ ảnh hưởng nào lên dòng [1]). Nói chung, kể cả khi đường dòng là đường cong nhưng vẫn đảm bảo rằng tấm chắn trùng với một trong các đường dòng thì nó sẽ không gây ảnh hưởng lên dòng khí động.

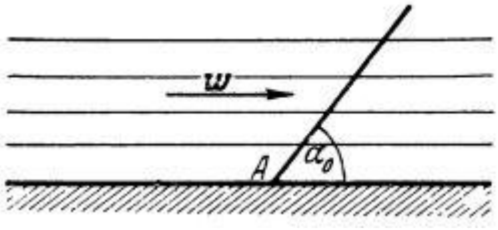
Nếu như tại một điểm A nào đó của tấm chắn (h. 4.10) xuất hiện một vật cản nhỏ thì nó sẽ làm nhiễu dòng chảy đều ở mức độ nhỏ. Trong dòng chảy siêu âm đều, quá trình nhiễu động lan truyền theo đường đặc trưng hợp với hướng dòng một góc α_0 được xác định từ điều kiện

$$\sin\alpha_0 = \frac{1}{\mathrm{M}}.$$

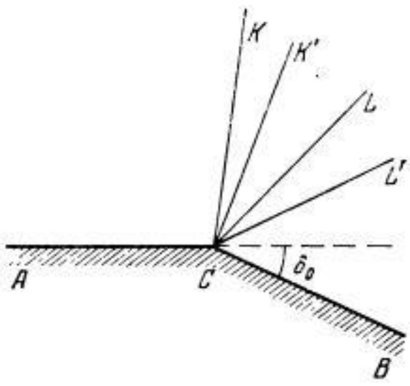
Nó được gọi là góc lan truyền nhiễu động yếu.

---

[1]) Ta không tính đến ảnh hưởng gây ra bởi độ nhớt của khí.



Hình. 4.10 Dòng khí chảy song song với tốc độ không đổi.



Hình. 4.11. Sự đổi hướng dòng siêu âm khi chảy bao quanh góc ACB

Lúc này ta có thể đưa ra hình minh họa sự chảy bao phía ngoài góc tù, giả sử rằng tại một điểm C nào đó trên tấm chắn, nó xoay góc δ_0 so với hướng ban đầu (h. 4.11). Khi dòng khí siêu âm chảy bao phía ngoài góc tù ACB, khí bị giãn ra, bởi vì vùng không gian bị choán bởi nó được mở rộng; kéo theo vận tốc dòng tăng lên. Dọc theo mặt AC thì vận tốc dòng không đổi. Trong trường hợp này , điểm C đóng vai trò như một vật cản, nó là nguồn phát sinh ra những nhiễu động yếu trong dòng. Trong dòng chảy đều, những nhiễu động này lan truyền theo đường thẳng — đường đặc trưng CK, nó phân cách vùng không nhiễu và vùng nhiễu trong dòng. Dọc theo mặt CB, vận tốc khí lại có giá trị không đổi và lớn hơn vận tốc dòng ban đầu dọc theo mặt AC. Điều này có nghĩa là, quá trình nhiễu động xuất hiện do sự chảy bao điểm góc C sẽ kết thúc trên đường thẳng đặc trưng CL'. Do đó, quá trình xoay dòng sang hướng mới xảy ra bên trong góc KCL' ở giữa hai đường đặc trưng mà ta đã nêu. Bởi vì bên trong góc KCL' xảy ra sự giãn khí liên tục, cho nên để dễ hiểu hơn ta sẽ chia vùng không gian này thành rất nhiều góc nhỏ, trong đó các thông số trong mỗi góc thay đổi tuy không đáng kể nhưng mang giá trị rời rạc.

Sự đột biến nhỏ đầu tiên về vận tốc và áp suất xảy ra khi dòng khí đi qua mặt chứa đường CK; bởi vì áp suất giảm nên theo lý thuyết về sự đột biến dòng, thành phần vận tốc vuông góc với mặt CK tăng lên; mặt khác thành phần vận tốc tiếp tuyến không đổi nên hướng đổi dòng khi có sự đột biến giãn sẽ ngược lại hướng đổi dòng khi xảy ra quá trình đột biến nén. Như vậy dòng khí chịu sự đột biến giãn nhỏ khi đi qua mặt CK, vận tốc dòng tăng lên không nhiều và hướng dòng có sự thay đổi nhỏ về phía tương ứng, còn áp suất, mật độ và nhiệt độ dòng giảm nhẹ. Quá trình nhiễu động lan truyền từ vùng có áp suất bé hơn sẽ bị chặn bởi đường đặc trưng CK', bởi vì sau quá trình đột biến giãn thì xuất hiện sự đổi hướng dòng và số Mach tăng nên CK' nằm phía phải so với đường đặc trưng CK. Bởi vì quá trình nhiễu động không đi qua đường đặc trưng CK' từ phía trái nên dọc theo đường CK' cũng như đối với đường CK, các thông số của khí và vận tốc dòng không đổi.

Nếu vận tốc dòng chỉ tăng nhẹ sau lần đột biến giãn đầu tiên thì khi chiếu vận tốc dòng theo phương tiếp tuyến và song song với đường CK', ta thấy rằng thành phần vận tốc tiếp tuyến sẽ nhỏ hơn($w_u' < w_u$), còn thành phần vận tốc song song (theo hướng đường CK') — lớn hơn ($w_r' < w_r$), khi so với các hình chiếu vận tốc lên đường CK.

Sự đột biến giãn thứ hai tương ứng với mặt phẳng CK' tiếp tục gây ra sự đổi hướng dòng về phía CB và sự giãn khí, do vậy vận tốc dòng tiếp tục tăng lên.

Quá trình đổi hướng dòng sẽ ngừng lại khi dòng song song với CB (h. 4.11), khi đó vector vận tốc cũng song song với CB.

Hơn nữa, tất cả các đường đặc trưng đều xuất phát từ điểm C đều là đường thẳng nên vận tốc (và các thông số còn lại của khí) dọc theo chúng không đổi, do vậy dọc theo đường đặc trưng cuối cùng CL', vector vận tốc w_s[2]) có giá trị không đổi (theo độ lớn và theo hướng). Do vậy, sau đường đặc trưng cuối cùng CL', dòng khí lại trở thành dòng tịnh tiến. Mặt khác, sau đó dòng không chịu bất cứ ảnh hưởng nào. Cho nên, sau khi đi qua góc ACB, dòng sẽ trở về trạng thái ban đầu giống hệt như dòng trên mặt AC, tức là ta thu được dòng tịnh tiến với vận tốc $w_s > w_t$. Đường đặc trưng cuối cùng CL' hợp với mặt CB góc α_s được xác định bởi

[2]) Điểm C là điểm đặc biệt bởi vì đó là nơi xuất phát của tất cả các đường đặc trưng. Tại từng đường, vận tốc và áp suất không đổi, tuy nhiên các đại lượng không đổi đó khác nhau đối với từng đường.

$$\sin\alpha_s = \frac{1}{\mathrm{M}_s},$$

Tương tự, đường đặc trưng đầu tiên hợp với mặt AC góc α_t được xác định bởi

$$\sin\alpha_t = \frac{1}{\mathrm{M}_t};$$

trong đó M_t, M_s — số M tương ứng với vận tốc trước và sau khi đổi hướng dòng.

Như ta đã biết, các quá trình đột biến giãn đoạn nhiệt hữu hạn không thể xảy ra. Tuy nhiên, nếu chia góc KCL' thành vô số góc nhỏ, ta sẽ thu được sơ đồ mô tả sự giãn nở liên tục của khí thay cho sơ đồ quy ước với những quá trình đột biến giãn nhỏ; thay cho số lượng hữu hạn các đường đặc trưng ta sẽ nhận được vô số đường đặc trưng — *chùm đường đặc trưng*.

Do đó, sự đổi hướng dòng gần góc tù ACB và sự giãn nở khí (giảm áp suất) có thể được coi như là dãy các nhiễu động yếu kế tiếp nhau được gây ra bởi đỉnh C, chúng lan truyền theo các đường thẳng đặc trưng đi từ đỉnh góc.

Những lập luận trên đây chỉ ra rằng, nếu có sự đổi hướng dòng siêu âm gần phía ngoài góc tù thì vận tốc, áp suất và mật độ khí không đổi nếu ta xét các thông số này trên một đường đặc trưng bất kỳ. Vì vậy khi xem xét sự chảy bao quanh góc tù, sẽ thuận tiên hơn nếu ta sử dụng hệ tọa độ cực với gốc tọa độ chính là đỉnh góc tù. Trong trường hợp này, những đường tọa độ chính là các tia xuất phát từ gốc tọa độ và những đường tròn đồng tâm cũng lấy đỉnh góc làm tâm. Tọa độ của mỗi điểm trên mặt phẳng có hai thành phần là vector-bán kính r nối điểm đó với gốc tọa độ và góc φ hợp bởi vector-bán kính với một hướng cố định mà ta sẽ xác định sau. Ta sẽ coi tất cả các thông số của khí là hàm phụ thuộc vào r và φ: $w = w(r,\varphi)$, $p = p(r,\varphi)$, $\rho = \rho(r,\varphi)$. Bởi vì trong trường hợp này, các thông số không đổi khi ta xét dọc theo các tia, nên đạo hàm riêng của các hàm w, p và ρ

theo r bằng không (khi di chuyển dọc theo tia, các thông số khí không đổi). Do đó,

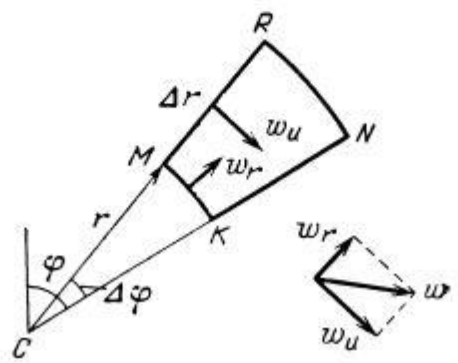
$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0, \ \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \ \frac{\partial \rho}{\partial r} = 0. \tag{11}$$

Ta ký hiệu các thành phần vận tốc theo hướng vector-bán kính và theo hướng vuông góc với nó lần lượt là w_r và w_u. Khi đó vận tốc bằng $w = \sqrt{w_r^2 + w_u^2}$. Bởi vì $\partial w/\partial r = 0$, nên

$$\frac{\partial w_r}{\partial r} = 0 \text{ và } \frac{\partial w_u}{\partial r} = 0. \tag{12}$$

Như chúng ta đã biết, tính chất cơ bản của đường đặc trưng thể hiện ở chỗ, thành phần vận tốc vuông góc với nó bằng vận tốc âm thanh a, mặt khác đường đặc trưng lại trùng với vector-bán kính, nên trong hệ tọa độ cực, thành phần vận tốc pháp tuyến được xác định từ điều kiện

$$w_u = a. \tag{13}$$



Hình. 4.12. Điều kiện không xuất hiện độ xoáy.

Dòng khí gần phía ngoài góc tù được gia tốc liên tục (đều đều), vì vậy có thể coi rằng đó là dòng thế. Tuy nhiên, khi đó lưu số theo một chu tuyến kín bất kỳ bằng không. Ta sẽ xác định lưu số theo chu tuyến $MRNK$ được giới hạn bởi hai đoạn MR và NK, và hai cung MK và RN. Chiều của chu trình thuận theo chiều kim đồng hồ (h. 4.12):

$$\Delta\Gamma = w_r \Delta r + \left(w_u + \frac{\partial w_u}{\partial r}\Delta r \right)(r + \Delta r)\Delta\varphi - \left(w_r + \frac{\partial w_r}{\partial \varphi}\Delta\varphi \right)\Delta r - w_u r \Delta\varphi = 0;$$

Bởi vì dọc theo vector-bán kính (đồng thời cũng là đường đặc trưng), vận tốc không đổi, nên

$$\frac{\partial w_r}{\partial \varphi} - w_u = 0. \tag{14}$$

Đây chính là điều kiện không xuất hiện độ xoáy trong dòng siêu âm chảy bao phía ngoài góc tù. Ta cũng có thể nhận được nó trực tiếp từ công thức (103) chương 2. Có thể giả thiết rằng các tia của dòng khí không trao đổi năng lượng với nhau, hơn nữa phương trình năng lượng có thể viết dưới dạng động học (công thức (48) chương 1):

$$\frac{2}{k-1}a^2 + w^2 = w_{max}^2. \tag{15}$$

Ở trường hợp này, trong dòng được gia tốc liên tục, độ tiêu hao áp suất toàn phần thường thì không đáng kể, vì vậy có thể coi quá trình nhiệt động lực học xảy ra khi dòng chảy bao góc tù là quá trình đẳng entropy, hay nói cách khác, nó thỏa mãn phương trình đoạn nhiệt lý tưởng:

$$p/\rho^k = const. \tag{16}$$

Bốn phương trình (13) — (16) tạo thành hệ phương trình mà lời giải của nó cũng chính là lời giải cho bài toán chảy bao phía ngoài góc tù đối với dòng siêu âm.

Từ phương trình (13) và (15) ta có

$$\frac{w_u^2}{k-1} + \frac{w_r^2 + w_u^2}{2} = \frac{w_{max}^2}{2}.$$

tương đương với

$$w_u^2 + \frac{k-1}{k+1}w_r^2 = \frac{k-1}{k+1}w_{max}^2. \tag{17}$$

Sử dụng phương trình (14), ta có phương trình vi phân[3]):

$$\left(\frac{\partial w_r}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{k-1}{k+1} w_r^2 = \frac{k-1}{k+1} w_{\max}^2 . \tag{18}$$

Tách riêng hai biến w_r và φ, ta có

$$\frac{dw_r}{\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\sqrt{w_{\max}^2 - w_r^2}} = d\varphi,$$

tương đương với

$$\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\frac{d\left(\frac{w_r}{w_{\max}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{w_r}{w_{\max}}\right)^2}} = d\varphi.$$

Lấy tích phân cả hai vế, ta thu được

$$\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\arcsin\frac{w_r}{w_{\max}} = \varphi + c_1,$$

Trong đó c_1 — hằng số tích phân. Chuyển biểu thức trên về hàm đối với w_r, ta tìm được

$$w_r = w_{\max}\sin\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}(\varphi + c_1)\right].$$

Khi đó từ phương trình (14), ta dễ dàng nhận được biểu thức cho w_u

$$w_u = w_{\max}\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\cos\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}(\varphi + c_1)\right].$$

[3]) Bởi vì các thông số của khí không đổi nếu ta xét dọc theo đường $\varphi = const$, khi dòng chảy bao phía ngoài góc tù, do đó chúng chỉ phụ thuộc vào góc phương vị φ . Vì vậy, trong phương trình (18) và về sau đạo hàm riêng theo φ được thay bằng đạo hàm toàn phần.

Bây giờ, ta sẽ xác định hằng số c_1. Xét trường hợp vận tốc dòng không nhiễu (trước khi xảy ra sự đổi hướng dòng) bằng vận tốc âm thanh ($\mathrm{M}_t = 1$). Tức là đường đặc trưng đầu tiên KC vuông góc với mặt AC, bởi vì

$$\sin\alpha_t = \frac{1}{\mathrm{M}_t} = 1,$$

Góc phương vị φ cần được tính từ hướng vuông góc với hướng vận tốc dòng không nhiễu. Khi đó $\varphi = 0$, do vậy $w_r = 0, w_u = w,$ thế $w_r = 0$ vào biểu thức đối với w_r:

$$0 = w_{\max} \sin\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}(0 + c_1)\right].$$

Do đó $c_1 = 0$. Tương tự, ta nhận được biểu thức cho các thành phần vận tốc w_r và w_u:

$$w_r = w_{\max} \sin\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\varphi\right),$$

$$w_u = w_{\max} \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \cos\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\varphi\right).$$

Sử dụng biểu thức (35) và (41) trong chương 1, ta thu được mối liên hệ giữa vận tốc tối đa và vận tốc tới hạn

$$w_{\max} = a_{th} \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$$

Khi đó biểu thức đốivới w_r và w_u được viết dưới dạng sau:

$$w_r = a_{th} \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \sin\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\varphi\right), \tag{19}$$

$$w_u = a_{th} \cos\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\varphi\right). \tag{20}$$

Nếu $\varphi = 0$ ta có $w_r = 0, w_u = w = a_{th}$, tức là vận tốc dòng không nhiễu bằng vận tốc tới hạn của âm thanh.

Lúc này, ta sẽ tìm đại lượng vận tốc toàn phần trên từng tia $w = \sqrt{w_r^2 + w_u^2}$. Từ các phương trình (19) và (20) ta có

$$w^2 = a_{th}^2\left[\frac{k+1}{k-1}\sin^2\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\varphi\right) + \cos^2\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\varphi\right)\right] =$$
$$= a_{th}^2\left[1 + \frac{2}{k-1}\sin^2\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\varphi\right)\right].$$

Do đó, vận tốc rút gọn bằng:

$$\lambda^2 = \frac{w^2}{a_{th}^2} = 1 + \frac{2}{k-1}\sin^2\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\varphi\right). \qquad (21)$$

Tất cả các thông số còn lại của khí được biểu diễn qua vận tốc rút gọn theo các công thức đã thu được trong chương 1:

$$\frac{p}{p^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}, \qquad (22)$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}, \qquad (23)$$

$$\frac{T}{T^*} = 1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2, \qquad (24)$$

$$\mathrm{M} = \sqrt{\frac{\frac{2}{k+1}\lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2}}. \qquad (25)$$

Như vậy, sau khi tìm được đại lượng λ^2 theo góc φ, khi sử dụng các công thức (22)-(25), ta có thể hoàn toàn xác định trạng thái của khí trên từng đường tia (đường đặc trưng). Khi $\varphi = 0$ ta thu được $\lambda = 1$, nếu $\varphi > 0$ thì $\lambda > 1$. Khi góc phương vị tăng, vận tốc dòng tăng, còn áp suất, mật độ và nhiệt độ giảm.

Từ biểu thức (21), ta thấy rằng tồn tại một góc phương vị nào đó để vận tốc rút gọn đạt giá trị lớn nhất.

$$\lambda_{max}^2 = \frac{k+1}{k-1},$$

Khi đó vận tốc, nhiệt độ và mật độ đều bằng không. Dễ thấy rằng vận tốc không thể tăng được thêm, do vậy quá trình đổi hướng dòng ngừng lại. Hay nói cách khác, tồn tại giá trị giới hạn của góc phương vị và nó được xác định bởi điều kiện

$$\sin^2\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\varphi_{max}\right) = 1.$$

Do đó

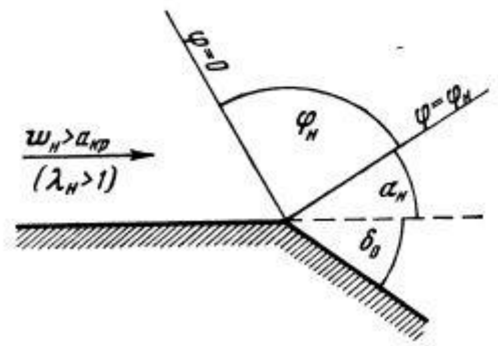
$$\varphi_{max} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}. \qquad (26)$$

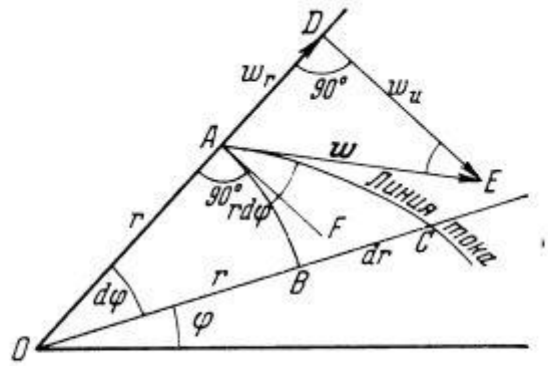
Ta nhận thấy rằng, lời giải vừa nhận được không những phù hợp khi $\lambda_t = 1$ mà nó còn thỏa mãn đối với tất cả các giá trị vận tốc siêu âm của dòng không nhiễu. Nếu vận tốc dòng không nhiễu lớn hơn vận tốc âm thanh thì góc phương vị trong công thức (21) cần phải tính từ góc φ_t chứ không phải từ góc $\varphi = 0$. Góc φ_t tương ứng với vận tốc rút gọn của dòng không nhiễu(λ_t).

Từ công thức (21) ta có

$$\varphi_t = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\arcsin\sqrt{\frac{k-1}{2}\left(\lambda_t^2 - 1\right)}. \qquad (27)$$

Lời giải mà ta nhận được thỏa mãn với mọi giá trị vận tốc bởi vì khi xét dọc theo một đường đặc trưng bất kỳ, vận tốc và các thông số còn lại không đổi, hay nói cách khác, trên một đường đặc trưng bất kỳ, ta thu được dòng chảy đều và song song (các đường dòng song song với nhau). Vì vậy, đối với sự đổi hướng dòng bên phải đường đặc trưng đang xét, ta không thể xác định những gì xảy ra bên trái nó, cụ thể hơn ta không biết rằng liệu dòng khí có đạt được vận tốc φ_t sau quá trình tăng tốc dòng từ $\lambda = 1$ và $\varphi = 0$ tới $\lambda = \lambda_t$ và $\varphi = \varphi_t$ (do sự đổi hướng ban đầu của dòng) hay là sự đổi hướng xảy ra ngay sau khi vận tốc rút gọn đạt giá trị $\lambda = \lambda_t$. Do vậy, trong trường hợp $\lambda_t > 1$, nếu $\varphi \le \varphi_t$ thì dòng sẽ giữ trạng thái không nhiễu, tức là tất cả các thông số của khí không đổi. Nếu $\varphi > \varphi_t$ thì các thông số của khí được tính theo các công thức (22)-(25)





Hình. 4.13(trái). Giá trị góc phương vị phụ thuộc vào vận tốc tới hạn

Hình. 4.14 (phải) Sự xác định đường dòng khi dòng chảy bao phía ngoài góc tù

Ta biết rằng, nếu vận tốc dòng không nhiễu lớn hơn vận tốc âm thanh thì góc φ được tính từ đường hợp với hướng dòng không nhiễu một góc $\varphi_t + \alpha_t$ chứ không tính từ đường vuông góc với hướng dòng, ở đây $\alpha_t = \arcsin\dfrac{1}{\mathrm{M}_t}$ (h. 4.13) là góc lan truyền nhiễu động yếu, tức là góc giữa đường đặc trưng và hướng dòng không nhiễu mà ta đang xét.

Để nhận được hình ảnh trực quan về quá trình chảy bao phía ngoài góc tù, ta sẽ tìm hình dạng đường dòng. Do đó, chúng ta sẽ lập phương trình vi phân cho đường dòng trong hệ tọa độ cực. Ta biết rằng, hướng vector vận tốc trùng với hướng tiếp tuyến tại từng điểm trên đường dòng. Lấy hai vector-bán kính nằm cách nhau một khoảng vô cùng bé và hợp với nhau góc $d\varphi$. Tại điểm A của bán kính thứ nhất, kẻ đoạn dòng AC, vector vận tốc $w = AE$ trùng với hướng tiếp tuyến của đường dòng (tại điểm A) và cung AB của đường tròn bán kính r (h. 4.14). Xét tam giác cong vuông ABC có kích thước vô cùng bé. Khi đó

$$tgA = \frac{BC}{AB} = \frac{dr}{rd\varphi}.$$

Mặt khác, góc giữa hai đường cong AB và AC bằng góc giữa hai tiếp tuyến AF và AE, tức là $tg(\angle EAF) = dr/rd\varphi$. Phân tích vector vận tốc w thành hai thành phần w_r và w_u. Xét tam giác ADE, ta thấy $tg(\angle DEA) = w_r/w_u$. Mặt khác, $\angle DEA = \angle EAF$. Do vậy,

$$\frac{dr}{rd\varphi} = \frac{w_r}{w_u}. \tag{28}$$

Phương trình (28) chính là phương trình vi phân của đường dòng trong hệ tọa độ cực.

Trong trường hợp chảy bao góc tù, w_r và w_u được xác định bởi các công thức (19) và (20), vì vậy phương trình vi phân (28) có dạng

$$\frac{dr}{r} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\varphi\right)}{\cos\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\varphi\right)} d\varphi.$$

Nó còn có thể được viết dưới dạng sau:

$$\frac{dr}{r} = -\frac{\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}}{\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}} \frac{d\left[\cos\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\varphi\right)\right]}{\cos\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\varphi\right)}.$$

Lấy tích phân hai vế ta có

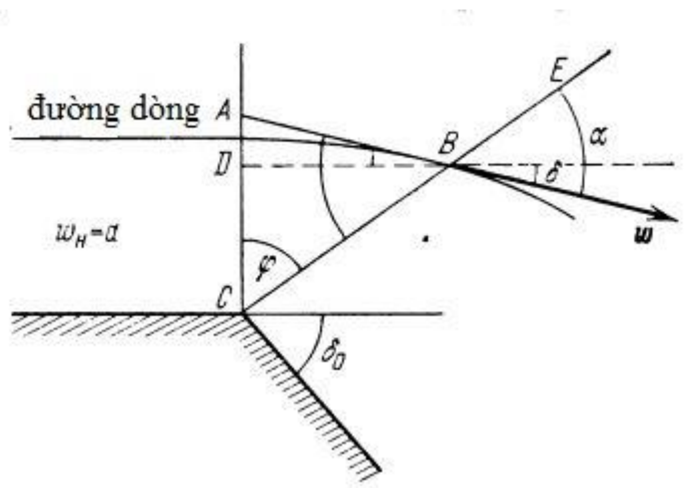
$$\ln r = -\frac{k+1}{k-1} \ln\cos\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\varphi\right) + \ln r_0.$$

Trong đó $\ln r_0$ là hằng số tích phân. Lấy lũy thừa cơ số e cả hai vế ta thu được.

$$r = r_0 \left[\cos\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \varphi \right) \right]^{-\frac{k+1}{k-1}}. \quad (29)$$

Phương trình (29) cũng chính là phương trình đường dòng trong hệ tọa độ cực. Trong đó r_0 — độ dài vector-bán kính đường dòng khi $\varphi = 0$, tương ứng với dòng không nhiễu. Từ phương trình (29) dễ thấy rằng, tất cả các đường dòng chính là tập hợp những đường cong đồng dạng với tâm đồng dạng nằm ở đỉnh góc. Khoảng cách pháp tuyến giữa hai đường cong kề nhau tăng theo hướng dòng.

Bây giờ ta sẽ tìm góc δ hợp bởi tiếp tuyến với đường dòng và hướng dòng không nhiễu (chuyển động với vận tốc âm thanh), hay nói cách khác, đó là góc quay của dòng khi nó đi tới tia CE (hình. 4.15).



Hình. 4.15 Mối liên hệ giữa các góc α, φ và δ trong dòng chảy bao góc tù

Xét h. 4.15, ở đây w — vector vận tốc tại điểm B, nó hướng theo tiếp tuyến với đường dòng tại điểm đang xét. Góc α — góc cục bộ của quá trình lan truyền các nhiễu động yếu. Như ta đã biết, góc α bằng góc hợp bởi hướng của vận tốc w và đường đặc trưng BE tại điểm đang xét. Góc δ — góc đổi hướng dòng mà ta cần tìm. Từ hình vẽ thấy rằng, $\angle ABD = \delta$, còn góc $ABC = \alpha$. Xét hai tam giác ABC và ABD, ta có

$$\angle A = \pi - \varphi - \alpha \text{ và } \angle A = \frac{\pi}{2} - \delta.$$

Do đó,

$$\pi - \varphi - \alpha = \frac{\pi}{2} - \delta,$$

tương đương với

$$\delta = \alpha + \varphi - \frac{\pi}{2}. \qquad (30)$$

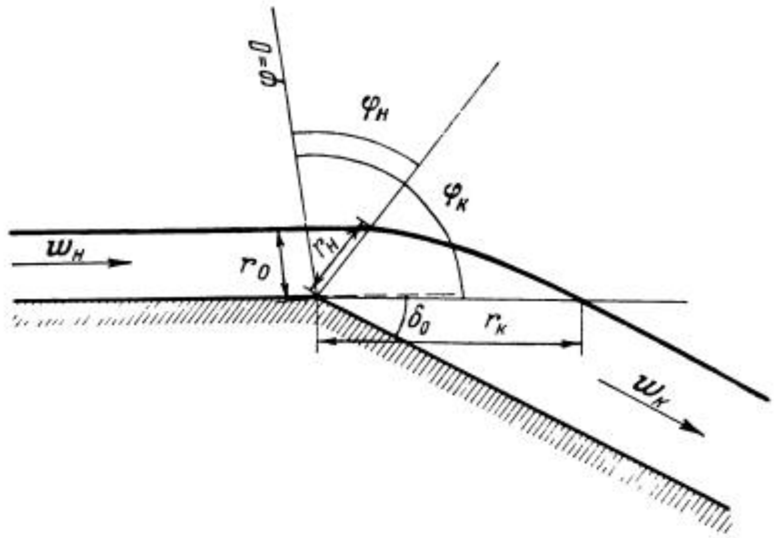
Góc lan truyền các nhiễu động yếu

$$\alpha = \arcsin\frac{1}{\mathrm{M}}. \qquad (31)$$

Do vậy, để tính góc đổi hướng dòng δ theo góc φ cho trước, ta cần thực hiện các bước sau:

1) xác định vận tốc rút gọn λ dựa vào công thức (21) theo góc φ cho trước,
2) xác định số M theo công thức (25),
3) xác định góc α theo công thức (31) và cuối cùng là,
4) xác định góc δ theo công thức (30) đối với góc φ cho trước. Do đó ta xác định được góc đổi hướng dòng là hàm phụ thuộc vào góc phương vị φ.

Đến thời điểm này, góc phương vị φ là biến tự do còn tất cả các thông số của khí đều là hàm phụ thuộc vào nó. Trên thực tế, thường thì ta biết được giá trị của góc tù, có nghĩa là ta sẽ biết được góc đổi hướng dòng δ_0 và vận tốc dòng đến. Dựa vào những giá trị trên, cần xác định mọi thông số của khí (vận tốc, áp suất, nhiệt độ v.v..) sau quá trình đổi hướng dòng. Vì vậy trong các bài toán thực tế, sẽ thuận tiện hơn khi tính toán nếu ta lập một bảng với thông số cơ bản là góc đổi hướng dòng δ, và tất cả các thông số còn lại của khí được xác định theo góc này. Những thông số trong bảng này được tính theo các công thức (21)-(25), (30) và (31) được đưa ra trong phụ lục 1 ở tr. 566-568.



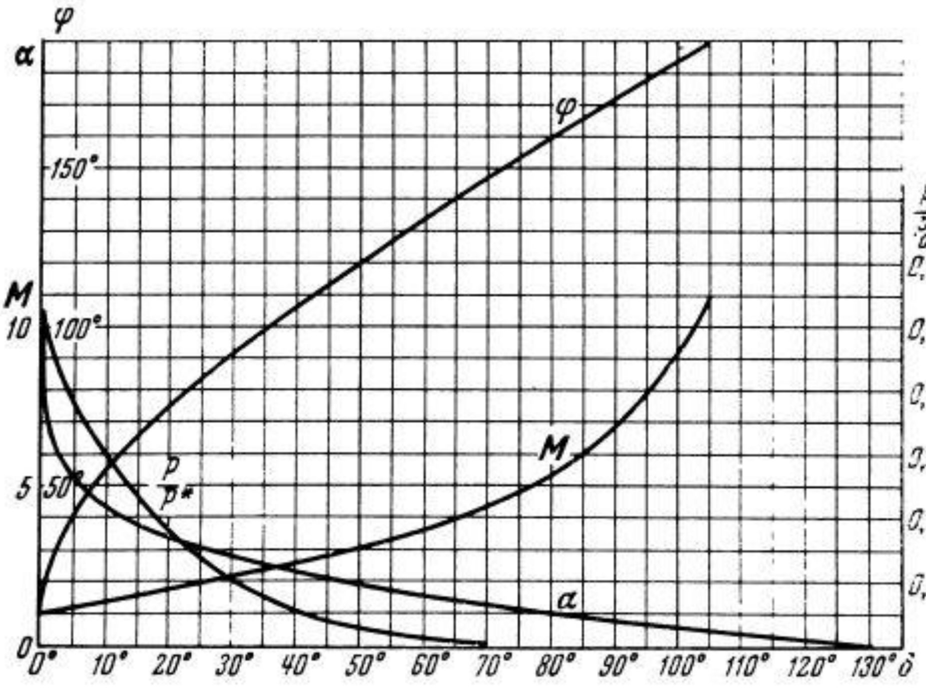
Hình. 4.16. Đường dòng của dòng siêu âm chảy bao phía ngoài góc tù

Ta cần sử dụng bảng này theo cách sau: dựa vào vận tốc cho trước của dòng không nhiễu w_t, ta xác định vận tốc rút gọn λ_t. Sau đó, tìm được góc ảo (phụ) của quá trình đổi hướng dòng tương ứng với λ_t (đây là góc mà dòng cần đổi hướng để đạt được vận tốc w_t cho trước). Ta sẽ xác định được góc $\delta_s = \delta_t + \delta_0$, trong đó góc cho trước δ_0 — góc đổi hướng dòng (h. 4.16). Khi biết giá trị δ_s ta xác định được các đại lượng $\lambda_s, \frac{p_s}{p_0}, \frac{\rho_s}{\rho_0}, \frac{T_s}{T_0}$ và M_s, tương ứng với vận tốc rút gọn, áp suất, mật độ, nhiệt độ và số M sau quá trình đổi hướng dòng gần góc tù. Các đường cong $\varphi(\delta)$, $\mathrm{M}(\delta)$, $\alpha(\delta)$ và $\frac{p}{p^*} = f(\delta)$ được biểu diễn trên h. 4.17. Nếu cần, ta có thể tìm hình dạng của đường dòng theo công thức (29), nó được xác định thông qua bán kính r_0 và dãy các giá trị φ từ $\varphi = \varphi_t$ tới $\varphi = \varphi_s$ (h. 4.16).

Để xác định góc đổi hướng dòng δ_0 theo vận tốc ban đầu và cuối cùng, ta có thể sử dụng công thức đơn giản của A. Ya. Cherkez, nó rất phù hợp với các số liệu của bảng khi $k = 1{,}4$:

$$\delta_0 = 7{,}6(\lambda_s^3 - \lambda_t^3). \qquad (32)$$

Trong đó λ_t và λ_s — tương ứng là vận tốc rút gọn của dòng trước và sau quá trình đổi hướng. Thông thường, nếu $\lambda < 2,3(\frac{p}{p^*} > 0,0005)$ thì sai số khi xác định góc δ_0 theo công thức trên không vượt quá 1°.



Hình. 4.17. Những đường phụ trong tính toán đối với dòng chảy siêu âm ở phía ngoài góc tù.

Lý thuyết về sự chảy vòng qua phía ngoài góc tù của dòng siêu âm được áp dụng để giải rất nhiều bài toán cụ thể trong động lực học chất khí, ta sẽ xem xét một trong số đó trong những bài sau.